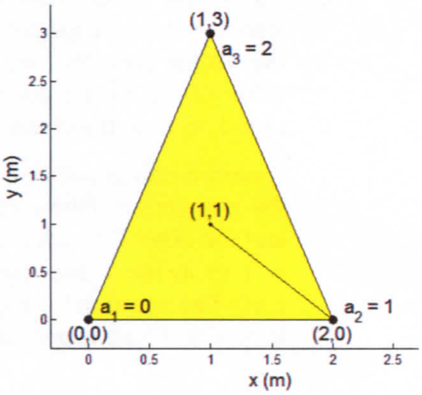
1. Selitä lyhyesti:
   a) jaksollisuusehto,
   b) isoparametrinen elementti,
   c) Newton-Raphson-menetelmä,
   d) skalaari- ja vektoripotentiaalit,
   e) Dirichlet'n ja Neumannin reunaehdot.

2. Oikealla oleva kuva esittää lineaarista kolmioelementtiä, jota käytetään kaksiulotteisen magneettikentän laskentaan. Vektoripotentiaalin solmuarvot a_1, a_2 ja a_3 näkyvät myös kuvassa. Laske vektoripotentiaali ja vuontiheyden x- ja y-komponentit kolmion keskipisteessä (1,1).

   Mittakäämi asetetaan siten, että sen sivut kulkevat z-suuntaan. Toinen sivu kulkee keskipisteen (1,1) kautta ja toinen solmun (2,0) kautta. Mittakäämin z-suuntainen pituus on 1 m. Mikä on mittakäämin käämivuo? Koordinaatit on annettu metreissä (m), vektoripotentiaalin arvot yksiköissä Wb/m. Mittakäämissä on yksi johdinkierros.



3. Määritellään funktio $f(x,y) = 2xy$. Halutaan laskea integraali

$$I = \int_{\Omega} \left|\nabla f(x,y)\right|^2 d\Omega,$$

missä Ω on tehtävän 2 kuvassa oleva kolmioelementti, ja $|\cdot|$ esittää vektorinormia. Määritä integraalin I arvo numeerisesti käyttäen kolmipisteistä Gaussin menetelmää. Referenssielementin ($\xi \geq 0$, $\eta \geq 0$, $\xi+\eta \leq 1$) integrointipisteet (ξ,η) ja -painot w on annettu oheisessa taulukossa. Lineaarisen kolmioelementin koordinaatistomuunnos on

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, \quad \text{missä } \boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}$$

ja (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 3$ ovat solmupisteiden koordinaatit.

Integrointipisteet ja -painot		
ξ	η	w
1/6	1/6	1/6
1/6	2/3	1/6
2/3	1/6	1/6

4. Kaksiulotteista pyörrevirtatehtävää ratkaistaan elementtimenetelmällä. Vektoripotentiaalin solmuarvovektorille $\boldsymbol{a}$ saadaan differentiaaliyhtälö $\boldsymbol{Sa} + \boldsymbol{T\dot{a}} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$. Johda yhtälöt solmuarvovektorin ratkaisemiseksi, kun

   a) suureiden sinimuotoista aikariippuvuutta mallinnetaan kompleksiluvuilla,

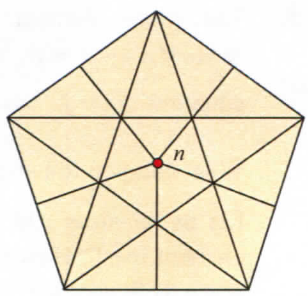
   b) soveltamalla aikariippuvuuteen trapetsimenetelmää

$$\boldsymbol{a}^k = \boldsymbol{a}^{k-1} + \frac{1}{2}\left(\dot{\boldsymbol{a}}^k + \dot{\boldsymbol{a}}^{k-1}\right)\Delta t$$

5. Oheisen kuvan mukaista elementtiverkkoa käytetään yhtälön $\nabla \cdot (\nu \nabla A) - J = 0$ ratkaisemiseen. Elementtimenetelmän mukainen diskretointi johtaa matriisiyhtälöön $\boldsymbol{Sa} = \boldsymbol{f}$. Matriisin $\boldsymbol{S}$ alkiot ovat muotoa $S_{ij} = \int_{\Omega} \nu \nabla N_i \cdot \nabla N_j d\Omega$.

   Mitä voit kertoa matriisin $\boldsymbol{S}$ ominaisuuksista ja rakenteesta?

   Tarkastellaan elementtiverkon solmuun n (kuva) liittyvää matriisin riviä n. Kuinka monta nollasta poikkeavaa alkiota riville n muodostuu, kun käytetään a) lineaarisia kolmioelementtejä, b) toisen asteen kolmioelementtejä? Perustele.

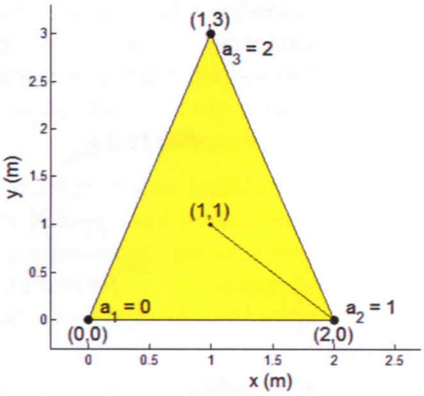


Laskimet sallittu

DEE-34306 Modeling of Electrical Machines and Magnetic Materials — Paavo Rasilo
Exam — May 12 2017

1. Explain briefly what mean
   a) periodicity condition,
   b) isoparametric element,
   c) Newton-Raphson method,
   d) scalar and vector potentials,
   e) Dirichlet and Neumann boundary conditions.

2. The figure on the right presents a linear triangular finite element which is used in magnetic field computation. The nodal values of the vector potential, a_1, a_2 and a_3, are also given. Calculate the value of the vector potential and the x- and y-components of the flux density in the center point (1,1).



   A search coil is positioned so that its two coil sides are oriented in the z-direction. One coil side goes through the center point (1,1) and the other through the node (2,0). The length of the search coil is 1 m in the z-direction. What is the flux linkage of the search coil? The coordinates are in meters (m), the vector potential values in Wb/m. There is one turn in the search coil.

3. Let's define a function $f(x,y) = 2xy$. We want to calculate the integral

$$I = \int_{\Omega} \left| \nabla f(x,y) \right|^2 d\Omega,$$

   in which Ω is the triangular element of the figure of Question 2, and $|\cdot|$ denotes the vector norm. Calculate the value of integral I numerically using the three-point Gaussian integration. The integration points (ξ,η) and weights w in the reference element ($\xi \geq 0$, $\eta \geq 0$, $\xi+\eta \leq 1$) are given in the adjacent table. The coordinate transformation of the triangular element is

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, \quad \text{in which } \boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}$$

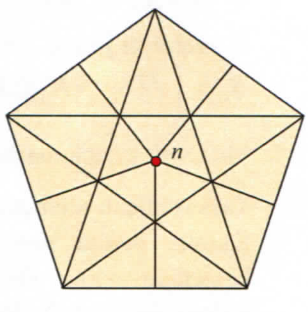
   and (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 3$ are the nodal point coordinates.

Integration points and weights		
ξ	η	w
1/6	1/6	1/6
1/6	2/3	1/6
2/3	1/6	1/6

4. A two-dimensional eddy-current problem is solved using finite element method. The differential equation obtained for the vector of nodal values $\boldsymbol{a}$ is $\boldsymbol{Sa} + \boldsymbol{T\dot{a}} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$. Derive an equation for solving the nodal values,
   a) when the sinusoidal time-variation of the nodal values is modelled using phasor quantities,
   b) the time dependence is modelled by the trapezoidal (or Crank-Nicolson) rule:

$$\boldsymbol{a}^k = \boldsymbol{a}^{k-1} + \frac{1}{2}\left(\dot{\boldsymbol{a}}^k + \dot{\boldsymbol{a}}^{k-1}\right)\Delta t$$

5. The finite element mesh on the right is used for solving equation $\nabla \cdot (\nu \nabla A) - J = 0$. The finite element discretization leads to a matrix equation $\boldsymbol{Sa} = \boldsymbol{f}$, where the matrix elements S_{ij} are $S_{ij} = \int_{\Omega} \nu \nabla N_i \cdot \nabla N_j d\Omega$.



   What can you tell about the characteristics and structure of matrix $\boldsymbol{S}$?

   Let us consider row n of the matrix associated with node n of the finite element mesh. How many non-zero matrix elements there will be on row n when a) first-order finite elements are used, b) second-order finite elements are used? Justify the numbers of non-zero matrix elements.

Calculators are allowed.