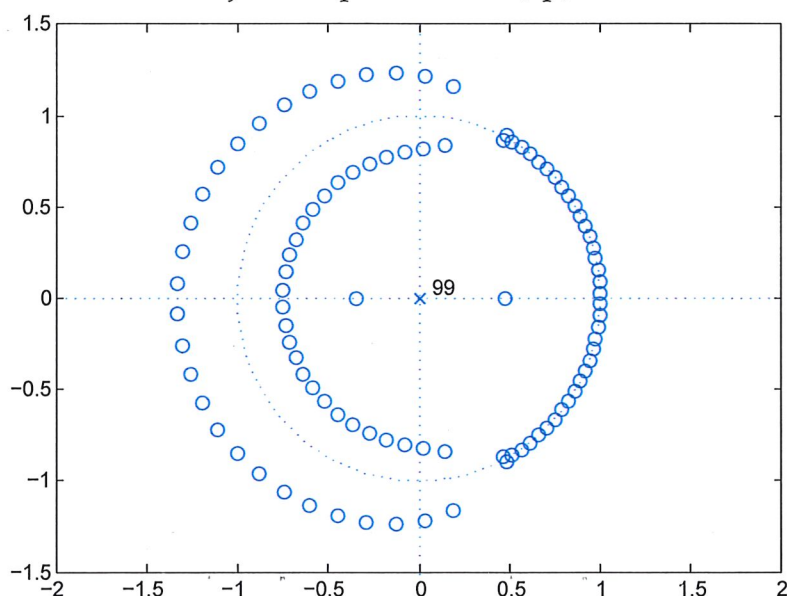
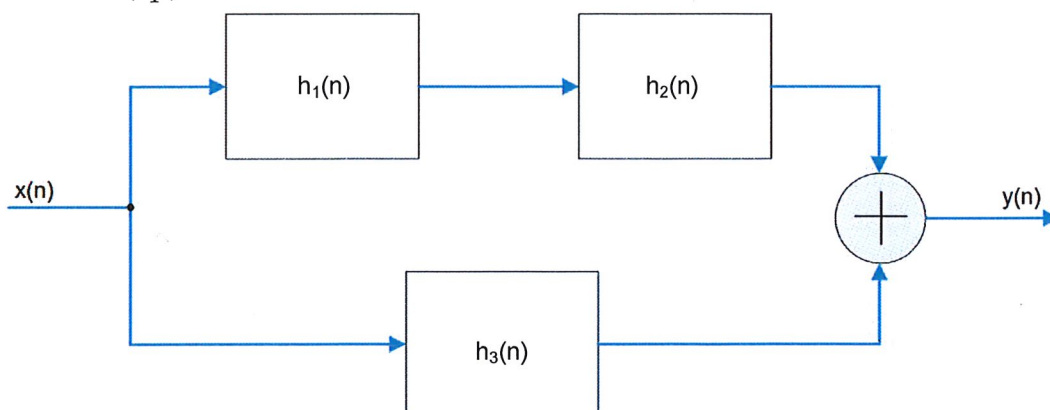


COMP.SGN.100 Signaalinkäsittelyn perusteet,
Tentti, 28.3.2023,
Sari Peltonen

- Oma laskin sallittu.
 - Tenttikysymyksiä ei tarvitse palauttaa.
1. (a) Erään suotimen napa-nollakuvio on alla olevassa kuvassa ja tiedetään että sen amplitudivaste $|H(e^{j\omega})| \in [0, 1]$. Hahmottele suotimen amplitudivasteen kuvaaja niin tarkasti kuin se näillä tiedoilla onnistuu. (2p)
- (b) Onko suodin stabiili ja millä perusteella? (2p)
- (c) Onko suodin FIR vai IIR ja millä perusteella? (2p)



2. (a) Laske vektorin $x(n) = (5, 7, -1, -1)^T$ diskreetti Fourier-muunnos. (3p)
- (b) Alla oleva järjestelmä voidaan toteuttaa yhtenä LTI-järjestelmänä. Mikä on saadun järjestelmän impulssivaste $h(n)$ ilmaistuna impulssivasteiden $h_1(n)$, $h_2(n)$ ja $h_3(n)$ avulla? (3p)



3. Oletetaan, että kausaalisen LTI-järjestelmän heräte $x(n)$ ja vaste $y(n)$ toteuttavat seuraavan differenssiyhtälön:

$$y(n) = -y(n-1) - \frac{1}{2}y(n-2) + x(n) - 2x(n-1) + 2x(n-2).$$

- (a) Määritä järjestelmän siirtofunktio $H(z)$. (2p)
 (b) Piirrä järjestelmän napa-nollakuvio. (2p)
 (c) Onko järjestelmä stabiili? Miksi / miksi ei? (2p)
4. Suunnittele ikkunamenetelmällä suodin (selvitä käsin impulssivasteen lauseke), jonka vaatimukset ovat seuraavat:

Estokaista	[0 kHz, 4 kHz]
Päästökaista	[5.5 kHz, 16 kHz]
Päästökaistan maksimivärähtely	0.1 dB
Estokaistan minimivaimennus	51 dB
Näytteenottotaajuus	32 kHz

Käytä oheisia taulukoita hyväksesi. (6p)

5. Alla oleva kuva esittää opetusdataa, jossa on kaksi luokkaa: "punaiset neliöt" (■) ja "siniset pallot" (●). Luokitteluun käytetään k :n lähimmän naapurin (k -NN) luokittelijaa. Kumpaan luokkaan kuvaan merkitty musta näyte (◆) kohdassa (3.5, 3) luokitellaan, kun käytössä on

(a) 1-NN luokittelija,

(e) 9-NN luokittelija,

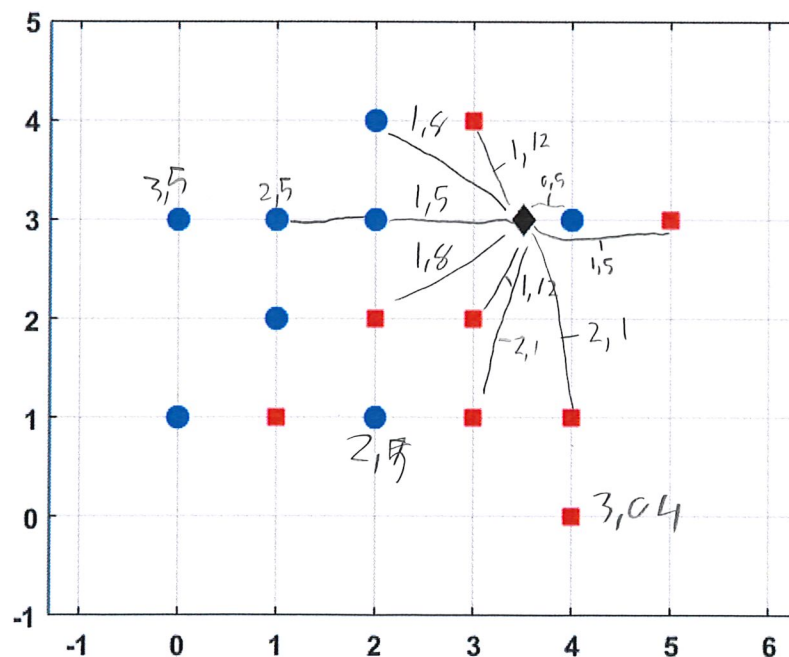
(b) 3-NN luokittelija,

(f) 11-NN luokittelija?

(c) 5-NN luokittelija,

(d) 7-NN luokittelija,

Perustele kukin vastauksesi. (6p)



Taulukot

Suodintyyppi	Impulssivaste kun	
	$n \neq 0$	$n = 0$
Alipäästö	$2f_c \text{sinc}(n \cdot 2\pi f_c)$	$2f_c$
Ylipäästö	$-2f_c \text{sinc}(n \cdot 2\pi f_c)$	$1 - 2f_c$
Kaistanpäästö	$2f_2 \text{sinc}(n \cdot 2\pi f_2) - 2f_1 \text{sinc}(n \cdot 2\pi f_1)$	$2(f_2 - f_1)$
Kaistanesto	$2f_1 \text{sinc}(n \cdot 2\pi f_1) - 2f_2 \text{sinc}(n \cdot 2\pi f_2)$	$1 - 2(f_2 - f_1)$

Ikkuna-funktion nimi	Siirtymäkaistan leveys (normalisoitu)	Päästökaistan värähtely (dB)	Estokaistan minimi-vaimennus (dB)	Ikkunan lauseke $w(n)$, kun $ n \leq (N-1)/2$
Suorakulmainen	$0.9/N$	0.7416	21	1
Bartlett	$3.05/N$	0.4752	25	$1 - \frac{2 n }{N-1}$
Hanning	$3.1/N$	0.0546	44	$0.5 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Hamming	$3.3/N$	0.0194	53	$0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Blackman	$5.5/N$	0.0017	74	$0.42 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right)$

Joitakin mahdollisesti hyödyllisiä Wikipedia-sivuja

Suppose two classes of observations have means $\vec{\mu}_0, \vec{\mu}_1$ and covariances Σ_0, Σ_1 . Then the linear combination of features $\vec{w} \cdot \vec{x}$ will have means $\vec{w} \cdot \vec{\mu}_i$ and variances $\vec{w}^T \Sigma_i \vec{w}$ for $i = 0, 1$. Fisher defined the separation between these two distributions to be the ratio of the variance between the classes to the variance within the classes:

$$S = \frac{\sigma_{\text{between}}^2}{\sigma_{\text{within}}^2} = \frac{(\vec{w} \cdot \vec{\mu}_1 - \vec{w} \cdot \vec{\mu}_0)^2}{\vec{w}^T \Sigma_1 \vec{w} + \vec{w}^T \Sigma_0 \vec{w}} = \frac{(\vec{w} \cdot (\vec{\mu}_1 - \vec{\mu}_0))^2}{\vec{w}^T (\Sigma_0 + \Sigma_1) \vec{w}}$$

This measure is, in some sense, a measure of the **signal-to-noise ratio** for the class labelling. It can be shown that the maximum separation occurs when

$$\vec{w} \propto (\Sigma_0 + \Sigma_1)^{-1} (\vec{\mu}_1 - \vec{\mu}_0)$$

When the assumptions of LDA are satisfied, the above equation is equivalent to LDA.

Be sure to note that the vector $\vec{w}$ is the **normal** to the discriminant **hyperplane**. As an example, in a two dimensional problem, the line that best divides the two groups is perpendicular to $\vec{w}$.

Generally, the data points to be discriminated are projected onto $\vec{w}$; then the threshold that best separates the data is chosen from analysis of the one-dimensional distribution. There is no general rule for the threshold. However, if projections of points from both classes exhibit approximately the same distributions, a good choice would be the hyperplane between projections of the two means, $\vec{w} \cdot \vec{\mu}_0$ and $\vec{w} \cdot \vec{\mu}_1$. In this case the parameter c in threshold condition $\vec{w} \cdot \vec{x} > c$ can be found explicitly:

$$c = \vec{w} \cdot \frac{1}{2}(\vec{\mu}_0 + \vec{\mu}_1) = \frac{1}{2} \vec{\mu}_1^T \Sigma_1^{-1} \vec{\mu}_1 - \frac{1}{2} \vec{\mu}_0^T \Sigma_0^{-1} \vec{\mu}_0.$$

Inversion of 2×2 matrices [edit]

The **cofactor equation** listed above yields the following result for 2×2 matrices. Inversion of these matrices can be done as follows:^[6]

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

A more condensed form of the difference equation is:

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left(\sum_{i=0}^P b_i x[n-i] - \sum_{j=1}^Q a_j y[n-j] \right)$$

which, when rearranged, becomes:

$$\sum_{j=0}^Q a_j y[n-j] = \sum_{i=0}^P b_i x[n-i]$$

To find the **transfer function** of the filter, we first take the **Z-transform** of each side of the above equation, where we use the **time-shift** property to obtain:

$$\sum_{j=0}^Q a_j z^{-j} Y(z) = \sum_{i=0}^P b_i z^{-i} X(z)$$

We define the transfer function to be:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^P b_i z^{-i}}{\sum_{j=0}^Q a_j z^{-j}} \end{aligned}$$

Considering that in most IIR filter designs coefficient a_0 is 1, the IIR filter transfer function takes the more traditional form:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^P b_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^Q a_j z^{-j}}$$

Techniques [\[edit\]](#)

Conceptual approaches to sample-rate conversion include: converting to an analog continuous signal, then re-sampling at the new rate, or **calculating** the values of the new samples directly from the old samples. The latter approach is more satisfactory, since it introduces less noise and distortion.^[3] Two possible implementation methods are as follows:

1. If the ratio of the two sample rates is (or can be approximated by)^{[nb 1][4]} a fixed rational number L/M : generate an intermediate signal by inserting $L - 1$ 0s between each of the original samples. Low-pass filter this signal at half of the lower of the two rates. Select every M -th sample from the filtered output, to obtain the result.^[5]
2. Treat the samples as geometric points and create any needed new points by interpolation. Choosing an interpolation method is a trade-off between implementation complexity and conversion quality (according to application requirements). Commonly used are: **ZOH** (for film/video frames), **cubic** (for image processing) and **windowed sinc function** (for audio).

Kaavoja

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\begin{cases} X(n) = X_0(n) + w_N^{-n} X_1(n), & \text{kun } n = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1 \\ X(n) = X_0(n - N/2) + w_N^{-n} X_1(n - N/2), & \text{kun } n = N/2, N/2 + 1, \dots, N - 1 \end{cases}$$