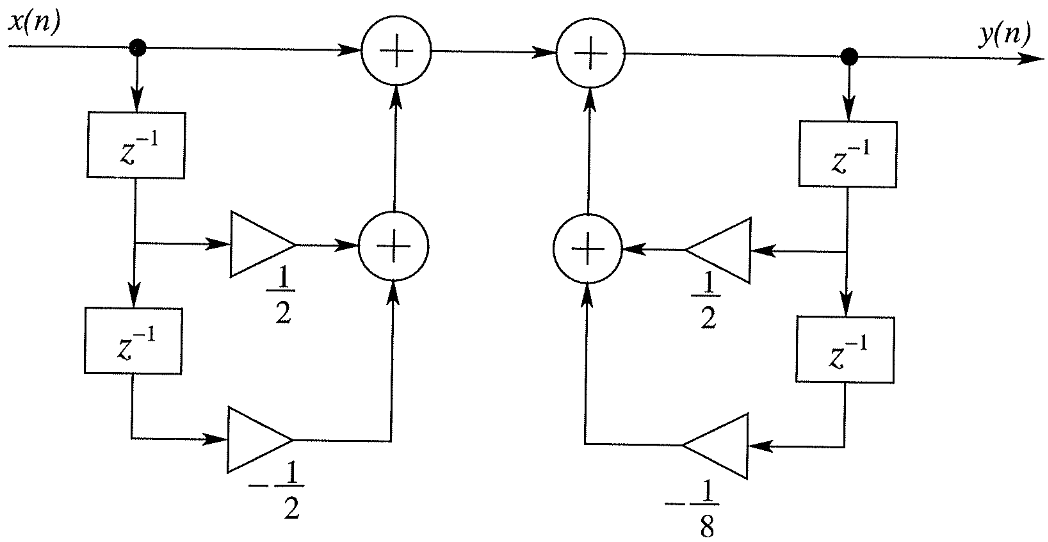
COMP.SGN.100 Signaalinkäsittelyn perusteet,
Tentti, 16.2.2023,
Sari Peltonen

- Oma laskin sallittu.
- Tenttikysymyksiä ei tarvitse palauttaa.

1. (a) Analoginen signaali koostuu neljästä siniaallosta, joiden taajuudet ovat 10, 40, 60 ja 110 Hz. Signaalista otetaan näytteitä $T = \frac{1}{100}$ sekunnin välein.
   i. Mikä on Nyquistin rajataajuus? (1p)
   ii. Miksi taajuuksiksi mainitut neljä sinitaajuutta tulkitaan näytteistämisen jälkeen? (2p)

   (b) Signaalin näytteenottotaajuus on 1350 Hz ja se halutaan tallentaa laitteelle, jonka näytteenottotaajuus on 50 Hz. Desimointi halutaan toteuttaa mahdollisimman tehokkaasti, joten usean vaiheen toteutukset on tutkittava. Piirrä mahdollisten toteutusten lohkokaaviot. (3p)

2. Tarkastellaan alla olevan lohkokaavion esittämää kausaalista LTI-järjestelmää:



   (a) Määritä järjestelmän siirtofunktio $H(z)$. (2p)
   (b) Piirrä järjestelmän napa-nollakuvio. (2p)
   (c) Onko järjestelmä stabiili? Miksi / miksi ei? (2p)

3. (a) Signaali $x(n)$ ja impulssivaste $h(n)$ ovat seuraavat:

$$
\begin{aligned}
x(n) &= -2\delta(n) - \delta(n-1) + 3\delta(n-2), \\
h(n) &= \delta(n+1) - \delta(n).
\end{aligned}
$$

   Piirrä signaalit $x(n)$ ja $h(n)$. Laske signaali $y(n) = h(n) * x(n)$ ja piirrä se. (3p)

(b) LTI järjestelmä (siirtofunktio $H(z)$) on *minimivaiheinen*, jos
- järjestelmä on stabiili ja
- sillä on käänteisjärjestelmä (siirtofunktio $\frac{1}{H(z)}$), joka on myös stabiili.

Molemmat järjestelmät oletetaan kausaalisiksi. Onko järjestelmä

$$H(z) = \frac{(z^2 - 1.2)(z^2 - 0.9)}{z^4 - z^3 + 0.125z^2}$$

minimivaiheinen? Perustele vastauksesi. (3p)

4. Suunnittele ikkunamenetelmällä suodin (selvitä käsin impulssivasteen lauseke), jonka vaatimukset ovat seuraavat:

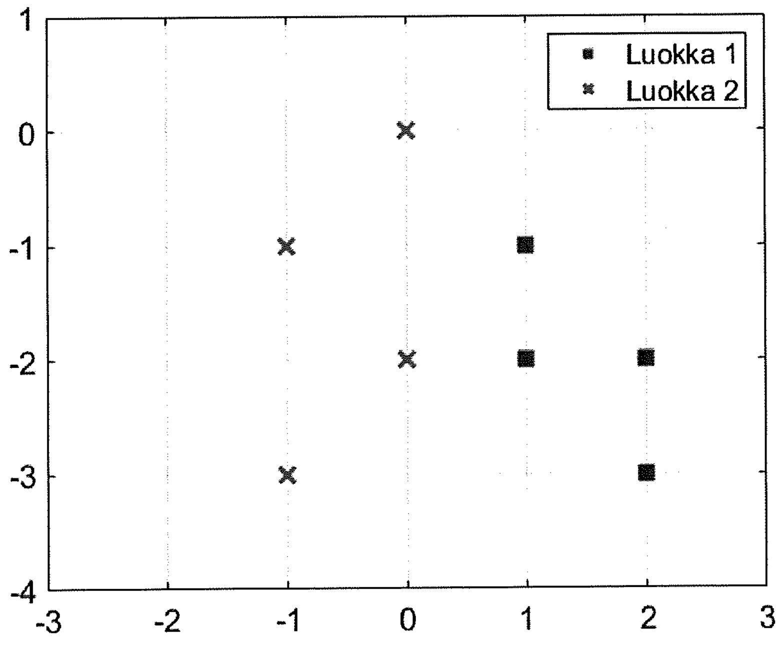
Päästökaista	[10 kHz, 15 kHz]
Estokaista	[0 kHz, 5 kHz]
Päästökaistan maksimivärähtely	0.5 dB
Estokaistan minimivaimennus	50 dB
Näytteenottotaajuus	30 kHz

Käytä oheisia taulukoita hyväksesi. (6p)

5. (a) Suunniteltaessa Fisherin lineaarista erottelijaa (LDA) alla olevan kuvan datalle saadaan luokkien kovarianssimatriiseiksi:

$$\mathbf{C}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Mikä on vektori $\mathbf{w}$ tälle LDA-luokittelijalle? (Huomaa, että pelkkä vastaus ei riitä. Kirjoita myös tarvittavat laskutoimitukset ja käännä matriisi käsin ohessa olevalla muistisäännöllä.) (3p)



(b) Kopioi (a)-kohdan kuva ja piirrä siihen 1-NN (lähimmän naapurin) luokittelijan luokkaraja kuvassa näkyvälle alueelle. (3p)

Taulukot

Suodintyyppi	Impulssivaste kun	
	$n \neq 0$	$n = 0$
Alipäästö	$2f_c \mathrm{sinc}(n \cdot 2\pi f_c)$	$2f_c$
Ylipäästö	$-2f_c \mathrm{sinc}(n \cdot 2\pi f_c)$	$1 - 2f_c$
Kaistanpäästö	$2f_2 \mathrm{sinc}(n \cdot 2\pi f_2) - 2f_1 \mathrm{sinc}(n \cdot 2\pi f_1)$	$2(f_2 - f_1)$
Kaistanesto	$2f_1 \mathrm{sinc}(n \cdot 2\pi f_1) - 2f_2 \mathrm{sinc}(n \cdot 2\pi f_2)$	$1 - 2(f_2 - f_1)$

Ikkuna-funktion nimi	Siirtymäkaistan leveys (normalisoitu)	Päästökaistan värähtely (dB)	Estokaistan minimi-vaimennus (dB)	Ikkunan lauseke $w(n)$, kun $\lvert n\rvert \leq (N-1)/2$
Suorakulmainen	0.9/N	0.7416	21	1
Bartlett	3.05/N	0.4752	25	$1 - \frac{2\lvert n\rvert}{N-1}$
Hanning	3.1/N	0.0546	44	$0.5 + 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Hamming	3.3/N	0.0194	53	$0.54 + 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Blackman	5.5/N	0.0017	74	$0.42 + 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$ $+0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right)$

Joitakin mahdollisesti hyödyllisiä Wikipedia-sivuja

Suppose two classes of observations have means $\vec{\mu}_0, \vec{\mu}_1$ and covariances Σ_0, Σ_1. Then the linear combination of features $\vec{w} \cdot \vec{x}$ will have means $\vec{w} \cdot \vec{\mu}_i$ and variances $\vec{w}^T \Sigma_i \vec{w}$ for $i = 0, 1$. Fisher defined the separation between these two distributions to be the ratio of the variance between the classes to the variance within the classes:

$$S = \frac{\sigma^2_{\text{between}}}{\sigma^2_{\text{within}}} = \frac{(\vec{w} \cdot \vec{\mu}_1 - \vec{w} \cdot \vec{\mu}_0)^2}{\vec{w}^T \Sigma_1 \vec{w} + \vec{w}^T \Sigma_0 \vec{w}} = \frac{(\vec{w} \cdot (\vec{\mu}_1 - \vec{\mu}_0))^2}{\vec{w}^T (\Sigma_0 + \Sigma_1) \vec{w}}$$

This measure is, in some sense, a measure of the signal-to-noise ratio for the class labelling. It can be shown that the maximum separation occurs when

$$\vec{w} \propto (\Sigma_0 + \Sigma_1)^{-1} (\vec{\mu}_1 - \vec{\mu}_0)$$

When the assumptions of LDA are satisfied, the above equation is equivalent to LDA.

Be sure to note that the vector $\vec{w}$ is the normal to the discriminant hyperplane. As an example, in a two dimensional problem, the line that best divides the two groups is perpendicular to $\vec{w}$.

Generally, the data points to be discriminated are projected onto $\vec{w}$; then the threshold that best separates the data is chosen from analysis of the one-dimensional distribution. There is no general rule for the threshold. However, if projections of points from both classes exhibit approximately the same distributions, a good choice would be the hyperplane between projections of the two means, $\vec{w} \cdot \vec{\mu}_0$ and $\vec{w} \cdot \vec{\mu}_1$. In this case the parameter c in threshold condition $\vec{w} \cdot \vec{x} > c$ can be found explicitly:

$$c = \vec{w} \cdot \frac{1}{2}(\vec{\mu}_0 + \vec{\mu}_1) = \frac{1}{2}\vec{\mu}_1^T \Sigma_1^{-1} \vec{\mu}_1 - \frac{1}{2}\vec{\mu}_0^T \Sigma_0^{-1} \vec{\mu}_0.$$

Inversion of 2 × 2 matrices [edit]

The *cofactor equation* listed above yields the following result for 2 × 2 matrices. Inversion of these matrices can be done as follows:[6]

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

A more condensed form of the difference equation is:

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left(\sum_{i=0}^{P} b_i x[n-i] - \sum_{j=1}^{Q} a_j y[n-j]\right)$$

which, when rearranged, becomes:

$$\sum_{j=0}^{Q} a_j y[n-j] = \sum_{i=0}^{P} b_i x[n-i]$$

To find the transfer function of the filter, we first take the Z-transform of each side of the above equation, where we use the time-shift property to obtain:

$$\sum_{j=0}^{Q} a_j z^{-j} Y(z) = \sum_{i=0}^{P} b_i z^{-i} X(z)$$

We define the transfer function to be:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^{P} b_i z^{-i}}{\sum_{j=0}^{Q} a_j z^{-j}} \end{aligned}$$

Considering that in most IIR filter designs coefficient a_0 is 1, the IIR filter transfer function takes the more traditional form:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{P} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^{Q} a_j z^{-j}}$$

Techniques [edit]

Conceptual approaches to sample-rate conversion include: converting to an analog continuous signal, then re-sampling at the new rate, or calculating the values of the new samples directly from the old samples. The latter approach is more satisfactory, since it introduces less noise and distortion.[3] Two possible implementation methods are as follows:

1. If the ratio of the two sample rates is (or can be approximated by)[nb 1][4] a fixed rational number *L/M*: generate an intermediate signal by inserting *L* − 1 0s between each of the original samples. Low-pass filter this signal at half of the lower of the two rates. Select every *M*-th sample from the filtered output, to obtain the result.[5]
2. Treat the samples as geometric points and create any needed new points by interpolation. Choosing an interpolation method is a trade-off between implementation complexity and conversion quality (according to application requirements). Commonly used are: ZOH (for film/video frames), cubic (for image processing) and windowed sinc function (for audio).

Kaavoja

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\begin{cases} X(n) = X_0(n) + w_N^{-n} X_1(n), & \text{kun } n = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1 \\ X(n) = X_0(n - N/2) + w_N^{-n} X_1(n - N/2), & \text{kun } n = N/2, N/2 + 1, \dots, N - 1 \end{cases}$$